Una breve introduzione alla Teoria dei Giochi[1]

Enrico Malizia

Università della Calabria

Dispense per il corso di *Intelligenza artificiale*
A.A. 2006/2007

Revisione: 8 novembre 2006

[1]Tratto dal lavoro di Tesi di Laurea Specialistica "*Metodologie e Tecniche di Negoziazione*" di Enrico Malizia

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Le intuizioni di questa teoria hanno origini antiche che si possono individuare nel lavoro di filosofi e studiosi di politica [12], ma una formulazione matematica della teoria dei giochi venne proposta solamente nel 1944 con il lavoro di John von Neumann e Oskar Morgenstern "*The Theory of Games and Economic Behavior*" [18].

I giochi vengono essenzialmente classificati in base alla loro struttura, che identifica come i turni di gioco si susseguono, ed in base alle informazioni che i giocatori dispongono. La classificazione in base alla struttura suddivide i giochi in due classi: i giochi in *forma normale*, o giochi strategici, ed i giochi in *forma estensiva*. Dal punto di vista delle informazioni i giochi si classificano in giochi ad *informazione perfetta*, giochi ad *informazione imperfetta* e giochi ad *informazione incompleta*.

Come è naturale aspettarsi ai giochi prendono parte dei giocatori. Questi devono scegliere una strategia di gioco, fra quelle loro disponibili, che, in base anche alle strategie adottate dagli altri giocatori, genera una certa utilità. La caratteristica essenziale che distingue un gioco da un problema di programmazione matematica è che, nei giochi, il risultato finale per ogni giocatore non dipende soltanto dalle proprie scelte ma anche da quelle che operano gli avversari.

Nei giochi in forma normale i giocatori devono compiere una sola azione e tutti i giocatori giocano contemporaneamente. Per questa ragione i giochi in forma normale vengono rappresentati, se possibile, attraverso una matrice che indica quale sarà la particolare utilità per un giocatore date le strategie che verranno adottate dai partecipanti. Nei giochi in forma estensiva i giocatori prendono parte al gioco in modo sequenziale, cioè a turno effettuano la loro mossa come nel gioco degli scacchi. I giochi sequenziali, quindi, vengono rappresentati attraverso una struttura ad albero che indica il turno dei giocatori e quali azioni possono attuare ogni volta che tocchi a loro.

I giochi ad informazione imperfetta sono quelli nei quali un giocatore non è a conoscenza delle azioni passate intraprese dai suoi avversari o perfino da se stesso. Come, ad esempio, in un gioco nel quale due giocatori giochino in sequenza ed il secondo giocatore non sa cosa sia stato scelto dal primo. Differenti sono i giochi ad informazione incompleta, nei quali la non completezza delle informazioni è relativa alle regole del gioco. Per esempio, un giocatore non conosce pienamente la matrice del gioco in forma normale e quindi non sa con esattezza quale sarà l'utilità propria o degli avversari in corrispondenza di particolari strategie di gioco. I giochi ad informazione perfetta sono quelli in cui i partecipanti conoscono tutto, sia riguardo alle scelte che alle utilità dei giocatori.

Una volta che si dispone della modellazione di un gioco quello che si vuole individuare una soluzione o equilibrio del gioco. L'interpretazione che si dà a questa soluzione è duplice [8]: quella di *stato stabile* oppure quella *deduttiva*.

L'interpretazione di stato stabile è strettamente collegata a quella che è naturale in economia. La teoria dei giochi, come le altre scienze, ha a che fare con le regolarità. Le leggi scientifiche sono delle affermazioni che riguardano queste regolarità, cercando di descriverle nel modo più preciso possibile. Questa interpretazione vede i giochi come un modello che descrive le regolarità di una famiglia di situazioni simili. Ogni partecipante "conosce" quale sia l'equilibrio e verifica l'ottimalità del suo comportamento data questa conoscenza che ha acquisito dalla sua lunga esperienza.

L'interpretazione deduttiva, invece, tratta un gioco in maniera isolata e cerca di capire quali restrizioni sul risultato finale impone la razionalità dei giocatori. Questa interpretazione assume che i giocatori deducano come gli avversari si comporteranno semplicemente tramite i principi della razionalità.

Rubinstein, in [13], afferma che l'interpretazione più plausibile è la prima. Egli dice, infatti, che esiste un diffuso mito relativo alla teoria dei giochi per il quale sia possibile ottenere una miracolosa predizione riguardo al risultato dell'interazione tra umani usando esclusivamente le informazioni relative all'ordine degli eventi (i turni di gioco) e la descrizione delle preferenze dei giocatori sui possibili risultati. Per molto tempo, sostiene Rubinstein, si è cercata la soluzione che riuscisse a portare questo risultato, ed è proprio la *mistica* e *vaga* parola "razionalità" che è stata utilizzata per alimentare le speranze di riuscire ad ottenere questo risultato. Rubinstein aggiunge che non vede alcuna possibilità per cui ciò sia possibile.

Capitolo 2

Giochi strategici

Iniziamo la trattazione dei giochi più semplici: i giochi strategici. In questi giochi i partecipanti effettuano le loro scelte in maniera totalmente indipendente dagli altri senza sapere cosa faranno i propri avversari. Effettuata la scelta tutti i giocatori compiono l'azione che hanno deciso.

Ogni giocatore possiede una certa relazione di preferenza su tutti i possibili risultati di un gioco che vengono generati dalle azioni che ognuno sceglie. Ad esempio se il giocatore i preferisce il risultato generato dal profilo di azioni a rispetto a quello generato dal profilo di azioni b ciò si indica con $a \succsim_i b$. Come detto in precedenza questo è quello che contraddistingue un gioco da un problema di ottimizzazione: la relazione di preferenza di un giocatore i è definita sul risultato il quale è generato dalle azioni scelte da tutti i giocatori e non solo da ciò che lui sceglie. Spesso è utile rappresentare la relazioni di preferenza del giocatore i tramite una funzione di payoff $u_i(\cdot)$, o funzione di utilità, nel senso che $u_i(a) \geq u_i(b)$ se e solo se $a \succsim_i b$.

È importante notare che, per come sono definite, le funzioni di payoff hanno solamente un significato *ordinale*, nel senso che specificano esclusivamente relazioni d'ordine. Se, ad esempio, il giocatore i ha per i profili di azioni a, b e c valori di payoff rispettivamente 1, 2 e 10 ciò significa solamente che $c \succsim_i b \succsim_i a$, e non implica in alcun modo che la preferenza del giocatore i di c su b sia più forte di quella di b su a. Per chiarire quanto finora detto vediamo un esempio, figura 2.1, ed in particolare mostriamo il gioco *Prisoner's Dilemma* [8]. Questo è

	Confess	Don't Confess
Confess	-3,-3	0,-4
Don't Confess	-4,0	-1,-1

Figura 2.1: Un esempio di gioco strategico: The *Prisoner's Dilemma*.

un gioco a due giocatori e, quindi, può essere rappresentato tramite una matrice nella quale vengono indicati i valori della funzione di payoff dei due giocatori.

I due giocatori sono dei prigionieri che vengono accusati di un crimine. I numeri all'interno della matrice indicano il valore della funzione di payoff dei prigionieri. Il primo numero della coppia indica il payoff del prigioniero che gioca sulle righe mentre il secondo è il valore di payoff del prigioniero che gioca sulle colonne; in particolare interpretiamo il valore assoluto di queste utilità come gli anni di prigione che vengono inflitti ad ogni prigioniero in base a cosa decide di fare, cioè se confessare o non confessare. Possiamo notare che la scelta migliore che possano effettuare i prigionieri è confessare entrambi. Questo perché, se entrambi non confessassero ciò sarebbe il miglior risultato in assoluto per entrambi i giocatori, ma se uno di loro sapesse che l'altro non confessa allora gli converrebbe confessare poiché non finirebbe in prigione a differenza di un anno di galera. Si noti come il profilo di azioni (Don't Confess;Don't Confess) non è possibile che venga osservato nella realtà perché nessuno dei prigionieri è incentivato a rimenare nelle proprie scelte sapendo che l'altro non confesserà. Differente è il profilo (Confess,Confess) nel quale nessuno dei prigionieri è incentivato a cambiare la propria scelta.

Gli studiosi di teoria dei giochi attraverso un gioco cercano di modellare una situazione che si presenta frequentemente ed in particolare cercano di identificare quale ne sia il risultato che si verificherà con regolarità. Un grosso passo in avanti in questo senso è stato fatto da John Nash che nel 1950 formalizza l'idea di equilibrio nei giochi strategici [6], anche se l'idea di base dietro il concetto di equilibrio è precedente.

2.1 Strategie pure

Ci occupiamo adesso del caso in cui i giocatori possono optare per strategie pure. Cosa significa questo? Con ciò si intende che un giocatore, avendo a disposizione un insieme di azioni che può adottare, ne sceglie una soltanto. Le strategie miste, invece, permettono ad un giocatore di poter operare come scelta una randomizzazione sulle azioni per lui disponibili: ciò significa che effettua una scelta non deterministica.

Caratterizziamo formalmente il concetto di equilibrio di Nash, ma prima di far questo definiamo precisamente cosa è un gioco strategico.

Definizione 2.1. *Un gioco strategico con preferenze ordinali è un gioco composto da:*

- *l'insieme N dei giocatori che vi prendono parte;*
- *per ogni giocatore $i \in N$ l'insieme S_i di azioni per lui ammissibili;*
- *per ogni giocatore $i \in N$ la sua relazione di preferenza $\succsim_i$ sull'insieme dei profili di azioni $S \equiv \times_{j \in N} S_j$. Questa è una relazione binaria completa, transitiva e riflessiva. Equivalentemente, invece della relazione di preferenza, la funzione di utilità $u_i \colon S \to \mathbb{R}$ che indica le preferenze del giocatore i sull'insieme dei profili di azioni.*

Un gioco strategico nel quale l'insieme delle azioni disponibili per ogni giocatore è finito si dice *gioco strategico finito*. Introduciamo adesso alcune notazioni che risulteranno utili nel seguito. Sia $s \in S$, con s_i indichiamo l'azione adottata dal giocatore i all'interno del profilo di azioni $s \in S \equiv \times_{j \in N} S_j$. Con s_{-i} indichiamo le azioni adottate da tutti i giocatori escluso i all'interno della strategia s. In maniera del tutto simile poniamo $S_{-i} \equiv \times_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$. Il profilo di azioni (s_i, s_{-i}) equivale al profilo s, così come $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ nel quale vengono esplicitate le azioni dei singoli giocatori. Tramite $u_i(s)$ si indica l'utilità, cioè il valore della funzione di payoff, che il giocatore i ottiene tramite la strategia complessiva s. Tramite la notazione $u_i(s_i, s_{-i})$ si rendono esplicite le azioni scelte dal giocatore i e dai suoi avversari. Infine la notazione $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ha il significato estensione naturale delle notazioni precedenti.

Definito un gioco strategico con preferenze ordinali possiamo definire cosa sia un equilibrio di Nash:

Definizione 2.2. *In un gioco strategico con preferenze ordinali il profilo di azioni s^* è un* ***equilibrio di Nash*** *se per ogni giocatore i ed ogni sua azione s_i, s^* è altrettanto buono quanto il profilo di azioni (s_i, s^*_{-i}) rispetto alle preferenze di i. Equivalentemente,*

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s^*_{-i}), \quad \forall s_i \in S_i, \forall i \in N. \tag{2.1}$$

Per come viene definito, l'equilibrio di Nash implica che, fissato il comportamento degli avversari, il giocatore i non è incentivato a cambiare la propria strategia di gioco. Riprendendo l'esempio di figura 2.1 possiamo notare che il profilo di azioni (Confess,Confess) è l'unico equilibrio di Nash del gioco.

Che interpretazione bisogna dare a questo equilibrio? Per quanto detto precedentemente questo equilibrio può rappresentare sia cosa giocheranno dei giocatori razionali, sia qual è il profilo di azioni che è possibile osservare all'interno di una società nella quale la situazione descritta dal gioco si presenta spesso. Nell'esempio del Prisoner's Dilemma, poiché l'equilibrio di Nash del gioco è unico, l'interpretazione *comportamento scelto da giocatori razionali* è possibile perché abbiamo una sola scelta "razionale". Nei casi in cui un gioco presenti più di un equilibrio di Nash l'interpretazione di comportamento razionale non è più molto plausibile. Mostriamo in figura 2.2 il gioco Bach or Stravinsky [8] (noto anche come *Battle of Sexes*). Questo gioco descrive la seguente situazione: due

	Bach	Stravinsky
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

Figura 2.2: *Bach or Stravinsky.*

persone vogliono uscire insieme per andare a sentire un concerto o di Bach o di Stravinsky. Ognuno preferirebbe ascoltare un particolare concerto ma entrambi preferiscono uscire insieme piuttosto che andare da soli al concerto da loro preferito. Questo gioco presenta due equilibri di Nash in particolare (Bach,Bach) e (Stravinsky,Stravinsky). Quello che ci chiediamo è: "Ok, esistono due equilibri di Nash, ma quale azione deve scegliere un particolare giocatore affinché possa ottenere un valore di payoff strettamente maggiore di zero?" Possiamo notare, infatti, che entrambi i giocatori preferiscono strettamente coordinare le proprie azioni piuttosto che andare a concerti differenti, ma abbiamo detto che nei giochi strategici la scelta delle azioni avviene in contemporanea e all'insaputa di ciò che sceglie l'avversario. Questo è un caso in cui entrambi gli equilibri di Nash sono plausibili, ma noi ci chiediamo quale dei due verrà effettivamente operato. La definizione di equilibrio di Nash non porta con se una caratterizzazione abbastanza forte da sciogliere questo dilemma. È proprio in questo caso che risulta evidente come l'interpretazione di stato stabile data da Rubinstein in [13] mostra tutta la sua correttezza: in una società in cui è frequente il verificarsi di una situazione di conflitto descritta dal gioco Bach or Stravinsky è lecito aspettarsi di osservare *una qualsiasi* di queste situazioni di equilibrio (questa interpretazione è anche quella adottata in [7]).

Gli equilibri non ci dicono, quindi, cosa un giocatore dovrà scegliere per ottenere il meglio, ma ci mostrano soltanto cosa è possibile aspettarsi di osservare in una società nella quale la situazione descritta dal gioco si presenta frequentemente. Nel caso in cui l'equilibrio fosse unico allora un giocatore potrebbe basare la sua strategia su di esso in quanto è la cosa migliore che può fare, ma nel gioco Bach or Stravinsky un giocatore rimane con il dubbio di cosa effettivamente farà il suo avversario e quindi non può scegliere.

Nell'articolo di Kreps e Wilson [4] si fa notare come tutte le interpretazioni che sono state date all'equilibrio di Nash sono caratterizzate dal fatto che, se i giocatori dovessero arrivare ad un contratto sul loro comportamento allora questo dovrebbe essere un equilibrio di Nash. Cioè, se i giocatori devono stipulare un contratto sul comportamento che adotteranno durante il gioco, questo non può che essere un equilibrio di Nash in quanto tale equilibrio garantisce che nessuno dei giocatori è incentivato a deviare dal contratto.

Strettamente collegato al concetto di equilibrio di Nash è quello di *miglior risposta* (*best response* in inglese).

Definizione 2.3. *Per qualsiasi profilo di azioni attuato dagli avversari del giocatore i, $s_{-i} \in S_{-i}$, definiamo tramite $B_i(s_{-i})$ la funzione best response come l'insieme delle migliori risposte che il giocatore i può adoperare dato il comportamento dei suoi avversari:*

$$B_i(s_{-i}) \equiv \{s_i \in S_i \colon u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}), \quad \forall s_i' \in S_i\}. \tag{2.2}$$

Detto ciò, un equilibrio di Nash può essere definito anche nel seguente modo:

Definizione 2.4. *In un gioco strategico con preferenze ordinali il profilo di azioni s^* è un **equilibrio di Nash** se*

$$s_i^* \in B_i(s_{-i}^*), \quad \forall i \in N \tag{2.3}$$

ovvero se ogni giocatore risponde nel modo migliore alle azioni intraprese dai suoi avversari.

È semplice notare come le due definizioni, 2.2 e 2.4, di equilibrio di Nash siano equivalenti a causa della definizione di best response data in (2.2). La definizione 2.4 ci suggerisce immediatamente un modo, non necessariamente efficiente, di calcolare un equilibrio di Nash: innanzitutto si calcolano le funzioni $B_i(\cdot)$ best response per ogni giocatore, quindi si calcola un profilo di azioni s^* tale che sia verificata la condizione (2.3) [7].

2.2 Strategie miste

Passiamo adesso all'analisi dei giochi strategici nei quali è permesso ai giocatori di utilizzare strategie miste. La nozione di equilibrio di Nash misto è stata proposta per modellare lo stato stabile di un gioco nel quale sia concesso ai giocatori di optare per strategie non deterministiche.

Nella definizione di gioco strategico 2.1 era presente per ogni giocatore una relazione di preferenza, $\succsim_i$, o una funzione di utilità, $u_i(\cdot)$, che serviva ad identificare per un dato giocatore quali erano le azioni per lui più favorevoli. Nel momento in cui ai giocatori è permesso poter randomizzare sulla scelta delle loro azioni è necessario introdurre il concetto di lotteria [14].

2.2.1 Il concetto di lotteria

Quando si pensa all'attività di prendere una decisione, spesso distinguiamo tra azioni e conseguenze: un'azione viene scelta, e questa porta a delle conseguenze. Una persona razionale che ha delle preferenze sulle conseguenze sceglierà l'azione che lo porta alle conseguenze che preferisce. Non sempre, però, la relazione che vi è fra azioni e conseguenze è deterministica, può accadere che sia stocastica. In un contesto stocastico la scelta di una azione è vista come la scelta di un "biglietto della lotteria", dove i premi sono le conseguenze. Siamo in una situazione nella quale sono presenti più lotterie e la decisione che si deve prendere è a quale di queste partecipare acquistandone un biglietto: è evidente che non vi è in questo caso una relazione deterministica fra azioni e conseguenze perché effettuata la scelta di una lotteria non possiamo sapere a priori quale sarà la conseguenza, in questo caso il premio che potremmo vincere di quella lotteria.

Sia Z un insieme di conseguenze (i premi), e supponiamo che Z sia un insieme finito. Una *lotteria* p è una distribuzione di probabilità su Z dove con $p(z)$ e $z \in Z$ indichiamo la probabilità che la lotteria p associa al verificarsi della conseguenza z, cioè la probabilità che nella lotteria p si vinca il premio z. Indichiamo con $\Delta(Z)$ l'insieme di tutte le possibili distribuzioni su Z, abbiamo quindi che $p \in \Delta(Z)$. Quello che si deve definire sono le relazioni di preferenza su $\Delta(Z)$. Di tali relazioni di preferenza ne possono essere definite di molti tipi [14], una di queste è quella dell'*utilità attesa*, indicata tramite $U(\cdot)$. In questo caso un numero $v(z)$ viene associato ad ogni premio, numero che indica il valore di una conseguenza, ed una lotteria viene valutata in base al suo valore atteso. Abbiamo quindi che una persona preferisce la lotteria p alla lotteria q, indicato con $p \succsim q$, se:

$$U(p) \equiv \sum_{z \in Z} p(z)v(z) \geq U(q) \equiv \sum_{z \in Z} q(z)v(z). \tag{2.4}$$

È importante notare la distinzione di $U(p)$, che è l'utilità della lotteria, da $v(z)$, che sono chiamati i numeri di Bernoulli o le utilità di von Neumann/ Morgenstern. La funzione $v(\cdot)$ è una funzione di utilità che rappresenta le preferenze sull'insieme Z delle conseguenze, e questa funzione è alla base della costruzione della funzione di utilità della lotteria, $U(\cdot)$, che esprime le preferenze sull'insieme delle lotterie $\Delta(Z)$.

Spesso, comunque, si dice che $v(\cdot)$ è una funzione di utilità di von Neumann/Morgenstern che rappresenta le preferenze su $\Delta(Z)$. Questo è possibile perché se la relazione di preferenza su $\Delta(Z)$ soddisfa gli assiomi di von Neumann/Morgenstern di *indipendenza* e *continuità* [18, 14], esistono dei valori $v(z)$, e sono unici, che permettono di rappresentare tramite la funzione di utilità attesa $U(\cdot)$ la relazione di preferenza sulla lotteria (teorema di von Neumann/Morgenstern) [18, 14]. Come detto, si può dimostrare [14] che i valori di utilità di von Neumann/Morgenstern $v(z)$ sono unici ad eccezion fatta di una trasformazione affine positiva (cioè la moltiplicazione per un numero positivo e la somma di uno scalare qualsiasi).

Ritornando adesso alle strategie miste, un gioco strategico nel quale sia permesso ai giocatori di scegliere una randomizzazione sulle proprie azioni è necessario che per ogni giocatore sia definita una relazione di preferenza, $\succsim_i$, su $\Delta(S)$ (l'insieme delle lotterie sui profili di azioni di tutti i giocatori): poniamo $\Sigma \equiv \Delta(S)$ e $\Sigma_i \equiv \Delta(S_i)$. Poiché i giocatori possono scegliere di randomizzare, questi devono effettuare una scelta di gioco all'interno dell'insieme delle strategie miste a loro disponibili: ogni giocatore i sceglie una strategia mista $\sigma_i \in \Sigma_i \equiv \Delta(S_i)$. In maniera simile al caso precedente, abbiamo che $\Sigma \equiv \times_{i \in N} \Sigma_i$ ed adottiamo la notazione σ_{-i} per indicare le strategie miste adottate dagli avversari del giocatore i. Una strategia $s_i \in S_i$ viene chiamata strategia pura. Per ogni strategia mista $\sigma_i \in \Sigma_i$ si indica con $\sigma_i(x)$ la probabilità che la strategia mista assegna alla strategia pura $x \in S_i$. Definiamo il supporto di σ_i come l'insieme di strategie pure di S_i alle quali viene assegnata una probabilità strettamente positiva in σ_i:

$$supp(\sigma_i) \equiv \{s_i \in S_i \colon \sigma_i(s_i) > 0\}. \tag{2.5}$$

Si assume, inoltre, che le distribuzioni di probabilità delle strategie miste dei vari giocatori siano indipendenti. Fatta questa precisazione, un profilo $(\sigma_j)_{j \in N}$ di strategie miste induce una distribuzione di probabilità sui risultati del gioco. Ciò significa che, affinché si verifichi un particolare risultato è necessario che tutti i giocatori, in concreto, scelgano le azioni che effettivamente lo realizzano. Per questa ragione la probabilità che un dato risultato si verifichi è dato dal prodotto delle probabilità che ogni giocatori effettui l'azione che porta a quel particolare risultato. Poiché siamo in presenza del profilo di strategie miste $(\sigma_j)_{j \in N}$, la probabilità di osservare il particolare risultato originato dal profilo di azioni $(s_j)_{j \in N}$ è pari a:

$$\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j). \tag{2.6}$$

Si assume, in questo contesto di strategie miste, che le relazioni di preferenza di ogni giocatore su Σ soddisfino gli assiomi di von Neumann/Morgenstern e quindi possano essere rappresentate utilizzando i valori di una qualche funzione $u_i \colon S \to \mathbb{R}$. In questo caso la funzione di utilità $u_i(\cdot)$ è una funzione di utilità di von Neumann/Morgenstern cioè indica quali sono i numeri di Bernoulli. Da ciò si ha che la relazione di preferenza su Σ di ogni giocatore è ottenuta come valore atteso di $u_i(\cdot)$.

Come abbiamo visto, un profilo $(\sigma_j)_{j \in N}$ di strategie miste induce sui risultati del gioco una distribuzione di probabilità, cioè abbiamo una distribuzione di probabilità su S, quindi $\sigma \equiv (\sigma_j)_{j \in N}$ è una lotteria su S. Perciò la relazione di preferenza del giocatore i su Σ è data dall'utilità attesa $U_i \colon \Sigma \to \mathbb{R}$:

$$U_i(\sigma) \equiv \sum_{s \in S} \left(\prod_{j \in N} (\sigma_j(s_j))\, u_i(s) \right) \tag{2.7}$$

È da notare che quando tutti gli insiemi S_i sono finiti allora si ha che [8]:

$$U_i(\sigma) \equiv \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i\left(e(s_i), \sigma_{-i}\right), \tag{2.8}$$

dove con $e(s_i)$ si indica la strategia mista degenerata che associa probabilità uno all'azione s_i. Possiamo adesso definire come sia caratterizzato un equilibrio per questo tipo di giochi.

Definizione 2.5. *In un gioco strategico un profilo di strategie σ^* è un* ***equilibrio di Nash misto*** *se per ogni giocatore i e per ogni strategia mista σ'_i egli non preferisce la lotteria indotta da $(\sigma'_i, \sigma^*_{-i})$ rispetto a quella indotta da σ^*, cioè*

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(\sigma'_i, \sigma^*_{-i}), \quad \forall \sigma'_i \in \Sigma_i, \forall i \in N. \tag{2.9}$$

Con un piccolo abuso notazionale, come in [2], indichiamo con $u_i(\sigma)$ l'utilità che il giocatore i percepisce dal risultato del gioco quando i giocatori adottano il profilo di strategie σ. Poniamo inoltre $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \equiv U_i(e(s_i), \sigma_{-i})$, cioè quando sono ammesse le strategie miste interpretiamo la strategia pura s_i come la strategia mista degenere $e(s_i)$.

Supponiamo che per un dato gioco strategico $\sigma^* \in \Sigma$ sia un equilibrio di Nash misto caratterizzato dal fatto che le strategie σ^*_i miste di ogni giocatore siano degeneri ed assegnino probabilità uno all'azione s^*_{-i}. Dal momento che l'insieme S_i può essere visto come un sottoinsieme di $\Sigma_i \equiv \Delta(S_i)$ il profilo di azioni s^* ricavato da σ^* è un equilibrio di Nash per il gioco. Viceversa, supponiamo che s^* sia un equilibrio di Nash puro per un certo gioco. Poiché l'utilità (2.8) di un dato profilo di strategie miste è lineare in σ_i nessuna distribuzione di probabilità sulle azioni S_i può portare al giocatore i una utilità maggiore di quella generata dalla strategia mista degenere $e(s^*_i)$, questo perché $U_i(e(s_i), \sigma_{-i}) \geq U_i(e(s'_i), \sigma_{-i})$ per ogni $s'_i \in S_i$, e quindi il profilo di strategie miste degeneri $(e(s^*_i))_{i \in N}$ è un equilibrio di Nash misto per quel gioco.

Abbiamo quindi mostrato che l'insieme degli equilibri di Nash puri di un gioco è un sottoinsieme di quello degli equilibri di Nash misti. Ci sono giochi che non possiedono equilibri di Nash puri ma tutti i giochi possiedono almeno un equilibrio di Nash misto.

Teorema 2.6 (di Nash)**.** *Ogni gioco strategico finito possiede almeno un equilibrio di Nash misto.*

Dimostrazione. Vedere uno fra [6, 8, 2]. □

Anche nel caso di strategie miste si può definire la funzione best response.

Definizione 2.7. *Per qualsiasi profilo di strategie miste attuato dagli avversari del giocatore i, $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$, definiamo tramite $B_i(\sigma_{-i})$ la funzione best response per il giocatore i come l'insieme delle migliori strategie pure che il giocatore i può adoperare dato il comportamento dei suoi avversari:*

$$B_i(\sigma_{-i}) \equiv \{s_i \in S_i \colon u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s'_i, \sigma_{-i}), \quad \forall s'_i \in S_i\} \tag{2.10}$$

Una proprietà fondamentale degli equilibri di Nash misti è quella enunciata dal seguente teorema:

Teorema 2.8. *Sia G un gioco strategico finito. Il profilo di strategie miste $(\sigma^*_i)_{i \in N}$ è un equilibrio di Nash misto per G se e solo se per ogni giocatore $i \in N$ tutte le strategie pure nel supporto di σ^*_i sono una best response alle strategie σ^*_{-i}.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Supponiamo che esista un'azione s_i nel supporto di σ_i^* che non sia una best response a σ_{-i}^*. Quindi, per la linearità di $U_i(\cdot)$ in σ_i, vedi (2.8), il giocatore i potrebbe incrementare la sua utilità portando a zero la probabilità di giocare s_i ed incrementare la probabilità di giocare un azione che sia una best response a σ_{-i}^*: da ciò il profilo di strategie miste σ^* non è un equilibrio di Nash misto.

$\Leftarrow$ Supponiamo che il profilo di strategie σ^* non sia un equilibrio di Nash misto, ed in particolare che per il giocatore i esista una strategia σ_i' tale per cui $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*) > u_i(\sigma^*)$. Nuovamente per la linearità di (2.8) in σ_i un'azione nel supporto di σ_i' deve dare al giocatore i un'utilità più alta di una qualche azione nel supporto di σ_i^* in risposta al profilo di strategie σ_{-i}^*: da ciò non tutte le azioni nel supporto di σ_i^* sono best response alle strategie σ_{-i}^*.

□

Corollario 2.9. *Sia G un gioco strategico finito e σ^* un equilibrio di Nash misto per G. Allora*

$$u_i(s_i', \sigma_{-i}^*) = u_i(s_i'', \sigma_{-i}^*), \quad \forall s_i', s_i'' \in supp(\sigma_i^*), \forall i \in N. \tag{2.11}$$

Cioè, in un equilibrio di Nash misto ogni azione nel supporto delle strategie miste di tutti i giocatori porta al giocatore la stessa utilità.

Dimostrazione. Supponiamo che ciò non sia vero e perciò che esista per il giocatore i una azione $\hat{s}_i \in supp(\sigma_i^*)$ tale per cui riceve un payoff strettamente maggiore rispetto a giocare le altre azioni in $supp(\sigma_i^*)$ diverse da $\hat{s}_i$: questo risulta essere in contraddizione con il teorema 2.8. □

Anche in questo caso si può definire un equilibrio di Nash misto in base alle funzioni best response dei vari giocatori.

Definizione 2.10. *In un gioco strategico con preferenze ordinali il profilo di strategie miste σ^* è un* ***equilibrio di Nash misto*** *se*

$$supp(\sigma_i^*) \subseteq B_i(\sigma_{-i}^*), \quad \forall i \in N \tag{2.12}$$

ovvero se ogni giocatore risponde nel modo migliore alle strategie miste intraprese dai suoi avversari.

Questo fa si che, se σ^* è un equilibrio di Nash misto allora per il giocatore i, fissate le strategie σ_{-i}^*, una qualsiasi randomizzazione sulle azioni $s_i \in supp(\sigma_i^*)$ gli apporta la stessa utilità. È ovvio, però, che se il giocatore i non si attenesse alla strategia mista σ_i^* questo porterebbe i sui avversari a rivedere le proprie strategie miste.

2.2.2 Esempio di equilibrio di Nash misto

Mostriamo adesso un esempio di gioco strategico con un equilibrio misto. In particolare riprendiamo l'esempio *Bach or Stravinsky* di figura 2.2 a pagina 5. Riproponiamo di seguito la matrice del gioco per averla sott'occhio. In questo caso interpretiamo i valori all'interno della matrice non come espressione della preferenza dei giocatori sui risultati ottenuti dalle strategie pure ma come valori

	Bach	Stravinsky
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

Figura 2.3: *Bach or Stravinsky.*

di utilità di von Neumann/Morgenstern. Sappiamo che questo gioco possiede due equilibri di Nash puri: (Bach,Bach) e (Stravinsky,Stravinsky). Siamo interessati a ricavare un equilibrio di Nash misto non degenere di questo gioco. Indichiamo con $\sigma_1(B)$ e $\sigma_2(B)$ rispettivamente la probabilità che il giocatore 1 e il giocatore 2 scelgano di andare al concerto di Bach. Per il corollario 2.9 abbiamo che all'equilibrio, in un equilibrio di Nash misto, supposto che il giocatore 2 adotti una determinata strategia $\sigma_2(B)$, l'utilità per il giocatore 1 di andare a sentire Bach o Stravinsky deve essere la stessa.

$$\begin{aligned} U_1(B, \sigma_2) &= u_1(B, B)\sigma_2(B) + u_1(B, S)(1 - \sigma_2(B)) \\ U_1(S, \sigma_2) &= u_1(S, B)\sigma_2(B) + u_1(S, S)(1 - \sigma_2(B)) \end{aligned}$$

e da ciò otteniamo che

$$\begin{aligned} U_1(B, \sigma_2) &= 2\sigma_2(B) + 0(1 - \sigma_2(B)) \\ U_1(S, \sigma_2) &= 0\sigma_2(B) + 1(1 - \sigma_2(B)). \end{aligned}$$

Il giocatore 1 preferirà giocare Bach nel momento in cui l'utilità sarà maggiore di giocare Stravinsky, cioè quando $U_1(B, \sigma_2) > U_1(S, \sigma_2)$. Viceversa preferirà giocare Stravinsky quando $U_1(B, \sigma_2) < U_1(S, \sigma_2)$. Quando le due utilità sono uguali per il giocatore 1 è indifferente giocare l'una o l'altra azione. Quindi, ricaviamo le condizioni in cui il giocatore 1 preferisce Bach:

$$\begin{aligned} 2\sigma_2(B) &> 1 - \sigma_2(B) \\ \sigma_2(B) &> 1/3. \end{aligned}$$

Ricapitolando avremo che il giocatore 1 utilizzerà questo tipo di strategia per massimizzare la sua utilità:

$$\sigma_1(B) = \begin{cases} 1 & , \sigma_2(B) > 1/3 \\ 0 & , \sigma_2(B) < 1/3 \\ [0, 1] & , \sigma_2(B) = 1/3 \end{cases}$$

In maniera simile otteniamo che per massimizzare la sua utilità il giocatore 2 sceglierà una di queste strategie:

$$\sigma_2(B) = \begin{cases} 1 & , \sigma_1(B) > 2/3 \\ 0 & , \sigma_1(B) < 2/3 \\ [0, 1] & , \sigma_1(B) = 2/3 \end{cases}$$

Noi vogliamo calcolare un equilibrio di Nash misto non degenere, per cui entrambi i giocatori devono adottare una strategia tale per cui $0 < \sigma_1(B) < 1$ e $0 < \sigma_2(B) < 1$. Affinché ciò si verifichi deve accadere che $\sigma_1(B) = 2/3$ e $\sigma_2(B) = 1/3$ da cui l'unico equilibrio di Nash misto non degenere è $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$.

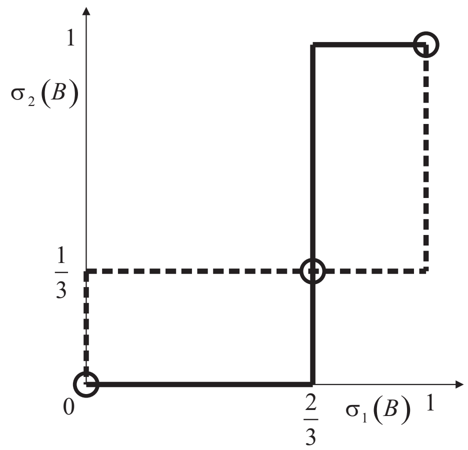

Figura 2.4: Le funzioni B_1 e B_2 best response dei due giocatori di *BoS*. La funzione best response del giocatore 1 è segnata con una linea tratteggiata, mentre quella del giocatore 2 con una linea continua. I cerchietti indicano gli equilibri di Nash: due puri ed un misto.

In figura 2.4 vengono mostrate quali siano le migliori risposte per entrambi i giocatori. Possiamo vedere come il giocatore 1 (linea tratteggiata) fino a che il giocatore 2 non adotta con una certa probabilità Bach, in questo caso $\sigma_2(B) = \frac{1}{3}$, preferisce giocare Stravinsky, cioè $\sigma_1(B) = 0$. Un discorso simile vale per il giocatore 2 (linea continua) che non sceglie Bach fino a che il suo avversario non lo giochi con una certa probabilità $\sigma_1(B) = \frac{2}{3}$.

2.2.3 Interpretazione delle strategie miste

Che non sia un compito semplice dare un'interpretazione alle strategie miste lo dice lo stesso Rubinstein in [13] citando un lavoro di Aumann [1]: "Gli equilibri di strategie miste sono sempre stati intuitivamente problematici. . . "; ed un altro lavoro di Radner e Rosenthal [9]: "Una delle ragioni per la quale le idee della teoria dei giochi non trovano grande diffusione nelle applicazioni è che la randomizzazione, che gioca un ruolo di primo rilievo nella teoria dei giochi, sembra che abbia una limitata attrattiva in molte situazioni concrete".

In questa sezione facciamo riferimento alle interpretazioni proposte in [8] e in [13], lavori ai quali rimandiamo per approfondimenti. Ci sono molte interpretazioni che vengono date alle strategie miste proprio perché non rappresentano qualcosa di totalmente intuitivo.

Strategie miste come oggetto di scelta: In questo tipo di interpretazione si suppone che i giocatori abbiano la possibilità concreta di decidere di optare per una strategia mista. Dicono: "Mi lego ad un congegno che è in grado di generare risultati random che io utilizzo per effettuare una scelta all'interno dell'insieme delle mie strategie pure". Dopo che tutti i giocatori si sono impegnati ad utilizzare queste macchine random un profilo di azioni viene implementato utilizzando i risultati ottenuti dalle macchine. In questo caso un giocatore deve scegliere un elemento dell'insieme $\Delta(S_i)$ nello stesso modo in cui sceglierebbe un elemento di S_i nei giochi strategici con solo strategie pure, cioè sceglie la randomizzazione che la macchina deve utilizzare quando genera le azioni. Ci sono dei casi nei quali i giocatori decidono di utilizzare una strategia random per aumentare la loro utilità attesa rispetto a giocare delle strategie pure: questo è il caso del poker nel quale i giocatori decidono di utilizzare una particolare randomizzazione dell'azione "bluff" per incrementare la loro utilità attesa [3].

Equilibri di Nash misti come stati stabili: Come nella sezione 2.1, gli equilibri di Nash misti possono essere letti come uno stato stabile delle interazioni sociali, ed in particolare possono essere interpretati come stati stabili stocastici. Ciò significa che i giocatori hanno delle informazioni relative alla frequenza con cui le azioni sono state scelte in passato: "In passato il 60% delle volte il giocatore 1 di questo gioco a scelto l'azione s' mentre il 40% delle volte ha scelto s''". Ogni giocatore utilizza queste informazioni statistiche per costruire una convinzione riguardo a come giocheranno i suoi avversari e quindi scegliere una sua strategia che può essere mista. Sempre in questo filone di interpretazione vi è quella di vedere un gioco ad n giocatori come un modello dell'interazione di n grandi popolazioni. Ogni volta che si verifica il gioco vengono scelti a caso gli n giocatori dalle n popolazioni: le probabilità della strategia mista σ_i^* all'equilibrio sono interpretate come la porzione di popolazione i che gioca quella particolare strategia pura all'interno di una situazione sociale stabile.

Strategie miste come convinzioni: In questo contesto un equilibrio di Nash misto viene interpretato come un profilo di convinzioni. In particolare se σ^* è un equilibrio di Nash misto, la strategia σ_i^* viene interpretata come la comune convinzione degli avversari di i circa le azioni del giocatore i, con la proprietà che per ogni giocatore i ogni azione nel supporto di σ_i^* è ottimale date le strategie σ_{-i}^*. In questa interpretazione ogni giocatore sceglie un'azione piuttosto che una strategia mista. Un equilibrio in questo caso è uno stato stabile delle convinzioni dei giocatori e non delle loro azioni. Queste convinzioni devono soddisfare due proprietà: la prima è che queste convinzioni siano comuni tra tutti i giocatori, la seconda è che siano consistenti con il fatto che i giocatori ricerchino la massimizzazione della loro utilità.

Strategie miste come strategie pure di un gioco esteso: In questo tipo di interpretazione, si suppone che ogni giocatore ricevi prima di giocare delle informazioni private sulle quali potrebbero dipendere le proprie azioni. Il giocatore potrebbe scegliere in maniera inconscia delle azioni che sono legate a queste informazioni e per questa ragione le sue scelte potrebbero risultare random ad un suo avversario. Un equilibrio di Nash misto potrebbe modellare il comportamento di un giocatore come random per esprimere il fatto che il suo comportamento sia dipendente da fattori che percepisce come irrilevanti. Oppure, un giocatore potrebbe essere a conoscenza del fatto che un suo avversario basi le sue scelte su fattori dei quali sia impossibile o troppo costoso determinare la relazione con le sue azioni. (Per la stessa ragione per cui si modella il risultato del lancio di un dado come random piuttosto che legarlo all'interazione delle sue molecole con l'aria, alla velocità e all'angolazione di lancio, la posizione di partenza, la velocità del vento, etc. . .). Un equilibrio di Nash misto viene visto come una descrizione di uno stato stabile di un gioco che manca di alcuni aspetti di un gioco più ampio, nel quale l'equilibrio risulterebbe puro.

Capitolo 3

Giochi estensivi

Quando si modella un contesto economico si vuole catturare quanto più possibile i dettagli rilevanti per rendere il modello rispondente alla situazione reale. Un gioco può avere una strutturazione temporale complessa che ne può caratterizzare in maniera sostanziale lo stato di equilibrio e quindi come il gioco verrà affrontato da chi vi prende parte. Queste strutture temporali non vengono espresse nei giochi strategici, nei quali i giocatori decidono contemporaneamente quale azione vogliono effettuare, quindi ci serve per i giochi una forma che sia in grado di fornire informazioni riguardo a:

1. l'insieme dei giocatori;
2. l'ordine delle mosse, cioè *chi* gioca e *quando*;
3. quali azioni sono disponibili per un giocatore quando è il suo turno;
4. quali informazioni sono a disposizione di un giocatore quando è il suo turno;
5. i valori di payoff che ogni giocatore riceve quando il gioco viene condotto in un modo particolare;
6. le distribuzioni di probabilità su qualsiasi evento esterno.

I giochi che riescono a modellare queste informazioni sono i *giochi estensivi*. Le componenti da 2 a 4 sono aggiuntive rispetto ai giochi in forma strategica e sono quelle che fanno la differenza rispetto ai giochi visti. Anche in questo caso assumiamo i giocatori $i \in N$, mentre le distribuzioni di probabilità sugli eventi esterni sono modellate tramite mosse della "Natura" che è il giocatore 0.

Fondamentale per un gioco estensivo è l'*albero di gioco* (*game tree* in inglese). È proprio tramite questo albero che si riescono a caratterizzare le componenti aggiuntive di un gioco estensivo rispetto ad un gioco strategico. Un albero è un grafo connesso aciclico la cui struttura, nodi ed archi, viene utilizzata per descrivere un gioco estensivo. Un albero definito solamente come grafo non è sufficiente a catturare le informazioni necessarie ad un gioco: quindi un albero va arricchito affinché diventi un game tree.

3.1 La struttura del "Game Tree"

Si assume che l'albero abbia almeno due nodi, ed uno di questi diventa il *nodo iniziale*, $\mathcal{O}$, dal quale comincia il gioco. I nodi che indicano il momento in cui un giocatore deve prendere una decisione vengono chiamati *nodi decisionali*, ed, in particolare, il nodo iniziale è uno di questi. Inoltre, i nodi che non sono quello iniziale e che hanno due o più rami incidenti sono nodi decisionali: indichiamo con X l'insieme dei nodi decisionali che sono un sottoinsieme di tutti i nodi V, quindi $X \subset V$. Tra i rami che incidono sui nodi decisionali uno porta al nodo in questione mentre gli altri partono dal nodo. Per distinguere quale sia il ramo entrante basta vedere quale di questi giace all'interno del percorso che va dal nodo iniziale al nodo interessato; mentre i restanti sono rami uscenti.

Interpretiamo i rami all'interno dell'albero come le azioni che i giocatori possono scegliere ed, in particolare, i rami uscenti da un nodo decisionale sono le azioni che il giocatore di turno può intraprendere. Vi è una funzione che assegna le azioni ai rami dell'albero. Sia A l'insieme di tutte le possibili azioni ed E l'insieme dei rami dell'albero, quindi la funzione che assegna le azioni ai rami è $f\colon E \to A$. Questa funzione, presso ogni nodo decisionale, deve assegnare un'azione ad un unico ramo uscente altrimenti se un giocatore scegliesse un'azione assegnata a più rami non si saprebbe quale di questi si dovrebbe percorrere. L'insieme di azioni disponibili ad ogni nodo decisionale $x \in X$ viene indicato tramite $A(x) \equiv f\left(\{e \in E\colon e \text{ è un ramo uscente da } x\}\right)$.[1] In figura 3.1 forniamo un esempio per mostrare quanto esposto. Possiamo notare il nodo

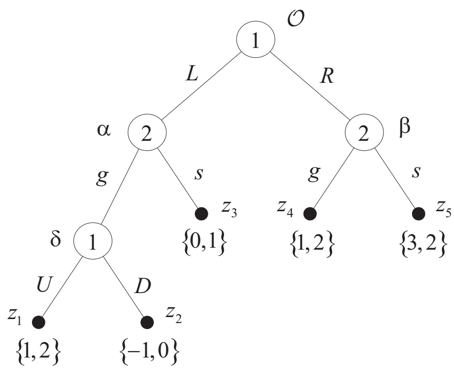

Figura 3.1: Un game tree.

iniziale, ed i nodi decisionali $X = \{\mathcal{O}, \alpha, \beta, \delta\}$. Inoltre gli insiemi di azioni sono $A(\mathcal{O}) = \{L, R\}$, $A(\alpha) = A(\beta) = \{g, s\}$ ed infine $A(\delta) = \{U, D\}$.

I nodi non iniziali che hanno un solo ramo incidente sono i *nodi terminali*. Indichiamo con $Z \subset V$ l'insieme dei nodi terminali; in figura 3.1 l'insieme dei nodi terminali è: $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$. L'insieme dei nodi di decisione e quello dei nodi terminali costituisce una partizione dell'insieme dei nodi dell'albero: infatti si ha che $V = X \cup Z$ e $X \cap Z = \varnothing$.

Il gioco termina quando si raggiunge un nodo terminale, ed i nodi terminali sono i *risultati* del gioco. A volte tramite il "risultato" di un gioco non si vuole

[1] Supponiamo che $f\colon X \to Y$ sia una funzione e $S \subset X$. Tramite $f(S)$ indichiamo l'immagine di S attraverso f: $f(S) \equiv \{f(x)\colon x \in S\}$.

indicare il solo nodo terminale raggiunto ma tutto il percorso dal nodo iniziale al nodo terminale. Un gioco estensivo nel quale tutti i nodi terminali possono essere raggiunti a partire dal nodo iniziale tramite un percorso finito vengono detti *finiti*.

Fino a questo punto abbiamo identificato come inizia e come termina un gioco, dobbiamo adesso occuparci dell'ordine in cui vengono effettuate le scelte dai vari giocatori. Dati due nodi distinti $v, v' \in V$, con $v \neq v'$, si dice che il nodo v *precede* v', e lo indichiamo con $v \prec v'$, se il nodo v giace all'interno dell'unico percorso da $\mathcal{O}$ a v'. Queste condizioni definiscono anche il concetto di successione ed indichiamo con $v' \succ v$ il fatto che v' è un *successore* di v. Ad esempio in figura 3.1 si ha che $\alpha \prec \delta$ poiché il percorso che raggiunge δ a partire dal nodo iniziale è $\{\mathcal{O}, L, \alpha, g, \delta\}$.

La relazione di precedenza, così come è stata definita, non è riflessiva ($v \not\prec v, \forall v \in V$), è asimmetrica ($v \prec v' \Rightarrow v' \not\prec v$) ed è transitiva ($(v \prec v') \wedge (v' \prec v'') \Rightarrow v \prec v''$). La relazione di precedenza non è necessario che sia completa, in quanto può accadere che né $v \prec v'$ né $v' \prec v$: ad esempio, per i nodi β e δ dell'albero in figura 3.1 nulla si può dire perché nessuno dei due giace all'interno del percorso dal nodo iniziale all'altro nodo.

Per la definizione della relazione di precedenza abbiamo che il nodo iniziale è il predecessore di tutti i nodi dell'albero ed egli stesso non ha alcun predecessore. Indichiamo con $P(x)$ l'insieme di tutti i nodi predecessori del nodo x: $P(x) \equiv \{v \in V : v \prec x\}$. La relazione di precedenza è, in generale, una relazione d'ordine non completa sull'insieme di tutti i nodi di un albero, ma risulta essere completa sull'insieme dei predecessori di un nodo.

Diciamo che il nodo v e l'*immediato predecessore* di v' se esiste un ramo che collega direttamente v a v': cioè se esiste un'azione che intrapresa al nodo di decisione v conduce al nodo v'. In maniera formale v è l'immediato predecessore di v' se $v'' \prec v, \forall v'' \in P(v') \wedge v'' \neq v$.

Abbiamo identificato i punti in cui vengono effettuate le decisioni (i nodi di decisione), e abbiamo dato l'ordine con cui queste decisioni devono essere prese indicando quale azione porta ad un dato nodo. Abbiamo definito *quando* le decisioni devono essere prese ed in quale ordine. Manca da definire *chi* deve prendere queste decisioni. Si deve assegnare ad ogni nodo di decisione un giocatore. Ciò viene fatto tramite una funzione $\iota\colon X \to (N \cup \{0\})$, dove 0 è il giocatore "Natura". Indichiamo con X_i l'insieme dei nodi di decisione nei quali il giocatore i effettua una scelta: $X_i \equiv \{x \in X : \iota(x) = i\}$. La funzione $\iota(\cdot)$ induce sui nodi di decisione una partizione formata dai vari insiemi X_i, si dice, pertanto, che un nodo appartiene ad un giocatore oppure che un giocatore possiede un nodo. In figura 3.1 il giocatore che possiede un nodo viene indicato ponendo il numero all'interno del nodo.

Mancano da definire i valori di payoff di ogni giocatore. La funzione di utilità $\mu_i\colon Z \to \mathbb{R}$ [11] assegna al giocatore i il valore di payoff nel caso in cui venga raggiunto un particolare nodo terminale. Si assume che queste siano utilità di von Neumann/Morgenstern, vedi il concetto di lotteria nella sezione 2.2. Questi valori di payoff rappresentano la relazione di preferenza dei giocatori sull'insieme dei risultati del gioco. In figura 3.1 i valori di payoff sono indicati vicino ai nodi terminali, ad esempio per il nodo z_2 il giocatore 1 ha un payoff di -1 mentre il giocatore 2 un payoff di 0.

All'inizio di questa sezione sono stati definiti gli aspetti salienti di un gioco in forma estensiva. Il punto 4, in particolare, fa riferimento alle informazioni che un giocatore dispone nel momento in cui effettua una scelta. È a questo punto che entra in scena la distinzione fra giochi ad informazione perfetta e giochi a informazione imperfetta introdotta nel capitolo 1. Può accadere, infatti, che dopo che abbia giocato il giocatore i sia il turno del giocatore j, ma quest'ultimo non conosca quale azione abbia scelto il giocatore i.

Ogni nodo all'interno di un game tree è il riassunto di quello che è accaduto fino a quel momento. Questo è vero perché esiste un solo percorso dal nodo iniziale ad un altro qualsiasi nodo dell'albero, quindi per un giocatore sapere in quale nodo si trova implica la completa conoscenza della storia che ha portato il gioco a trovarsi in quello stato: per questa ragione quel giocatore conosce tutte le mosse effettuate da tutti i giocatori in tutti i nodi decisionali incontrati fino a quel punto. L'unico modo, allora, affinché si possa modellare che un particolare giocatore ignori quale sia stata la mossa effettuata in passato da un suo avversario, è fare in modo che questo giocatore non sappia in quale nodo il gioco si trovi attualmente. I giochi ad informazione perfetta sono quei giochi nei quali tutti i giocatori sanno sempre con esattezza in quale nodo del gioco si trovano, mentre i giochi ad informazione imperfetta sono quei giochi nei quali accade almeno una volta che un giocatore non sappia con precisione in quale nodo si trova.

Un game tree deve dare la possibilità che questa incertezza possa essere evidenziata, e per questa ragione si introduce il concetto di *information set*. Un information set h è un sottoinsieme dell'insieme dei nodi di decisione, $h \subset X$, ed indica il fatto che nel momento in cui viene raggiunto uno di questi nodi in h, il giocatore a cui tocca effettuare la scelta non sa in quale di questi nodi si trovi effettivamente: è a conoscenza di trovarsi in uno dei nodi dell'information set ma non sa in quale. Ciò implica che questo giocatore non è a piena conoscenza delle scelte effettuate in passato dai suoi avversari o perfino da se stesso.

Ci sono alcune restrizioni che gli information set devono rispettare. Innanzitutto un nodo può appartenere ad un solo information set, perché se ciò non fosse vero un giocatore non saprebbe nemmeno in quale information set si trova, e non vogliamo che ciò sia possibile. Per questa ragione l'insieme H di tutti gli information set costituisce una partizione dell'insieme dei nodi di decisione, abbiamo che $X = \bigcup_{h \in H} h$. Si può inoltre definire una funzione $\hat{h} \colon X \to H$ che indica per ogni nodo di decisione a quale information set appartiene: $\hat{h}(x) \equiv h \Leftrightarrow x \in h$.

Oltre a questo primo vincolo, tutti i nodi di un information set devono appartenere allo stesso giocatore, altrimenti risulterebbe ambiguo stabilire di chi è il turno nel momento in cui venisse raggiunto un information set che non rispetta questo vincolo. Possiamo quindi parlare dell'information set di un giocatore ed indicarlo, con una sovrapposizione di simboli, tramite la funzione $\iota \colon H \to N$. Anche in questo caso possiamo effettuare un partizionamento e suddividere l'insieme H negli insiemi di information set appartenenti ad un giocatore: $H_i \equiv \{h \in H \colon \iota(h) = i\}$. Da ciò scriviamo che $X_i = \bigcup_{h \in H_i} h$.

Come ulteriore vincolo vi è quello che tutti i nodi di un information set devono avere lo stesso insieme di azioni possibili: $A(x) = A(x'), \forall x, x' \in h, \forall h \in H$. Ciò è necessario altrimenti un giocatore potrebbe riconoscere i nodi di un suo information set guardando alle azioni che ha disponibili. Possiamo riferirci, quindi, all'insieme di azioni disponibili in un information set ed indicarle tramite la funzione, $A(h) \equiv \bigcup_{x \in h} A(x)$, anche in questo caso con una sovrapposizione di simboli, e ciò equivale a porre $A(h) \equiv A(x)$ a causa della restrizione che abbiamo appena illustrato.

Un information set può essere un singoletto, cioè un insieme con un solo elemento. Se tutti gli information set di un gioco sono dei singoletti allora il gioco è ad informazione perfetta. Se anche un solo information set contiene più di un nodo siamo in presenza di un gioco ad informazione imperfetta.

Cambiando un po' la struttura del gioco di figura 3.1 mostriamo un gioco ad informazione imperfetta in figura 3.2. Il gioco di figura 3.1 è ad informazione

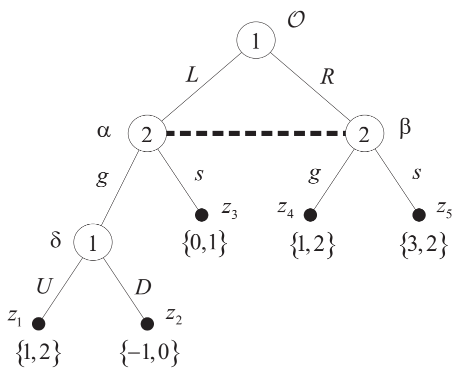

Figura 3.2: Un gioco estensivo ad informazione imperfetta.

perfetta, quindi tutti gli information set sono dei singoletti, e graficamente non vengono indicati in alcun modo. Se, invece, un information set contiene più nodi questi vengono evidenziati tramite una linea tratteggiata che li collega. Nell'esempio di figura 3.2 possiamo notare un information set composto dai nodi α e β. Questo information set indica che quando è il turno del giocatore 2 egli non sa se precedentemente il giocatore 1 ha scelto l'azione L oppure R.

Come abbiamo detto in precedenza, in un gioco ad informazione imperfetta un giocatore potrebbe non avere piena conoscenza nemmeno delle sue stesse azioni. Un gioco estensivo nel quale un giocatore non dimentica alcuna informazione una volta che questa è stata acquisita è detto gioco a *memoria perfetta* (*perfect recall* in inglese). La stragrande maggioranza dei giochi analizzati in letteratura economica sono giochi a memoria perfetta.

Ci sono due condizioni da soddisfare affinché un gioco sia a memoria perfetta. La più semplice è che se due nodi sono nello stesso information set allora nessuno dei due può precedere l'altro, altrimenti il giocatore non si ricorderebbe di avere già giocato ad un nodo decisionale. La seconda è un po' più complessa ed una sua formalizzazione si trova in [4], ed è spiegata molto bene in [11]. Se due nodi si trovano nello stesso information set allora devono essere indistinguibili, ed in particolare non devono essere distinguibili nemmeno tramite la storia che conduce a quei nodi. Siano x' e x'' due nodi in uno stesso information set. Se esiste un nodo x predecessore di x' con $\iota(x) = \iota(x')$ allora deve esistere un nodo $\hat{x} \in \hat{h}(x)$ predecessore di x'' tale per cui l'azione che può condurre il gioco da x a x' deve essere la stessa di quella che può condurre il gioco da $\hat{x}$ a x''.

Per concludere, quando un gioco estensivo ammette la mossa della Natura le probabilità delle mosse vengono indicate tramite parentesi quadre.

La descrizione di un gioco in forma sequenziale tramite gli alberi è dovuta a Kuhn in [5], mentre in [4] si descrive un gioco sequenziale tramite il concetto di *arborescence*. Ratliff in [10, 11] mostra come questa caratterizzazione sia insufficiente ad eliminare alcune strutture che sono arborescence ma non sono alberi.

3.2 Le strategie nei giochi estensivi

La strategia di un giocatore in un gioco estensivo specifica quale azione sceglie ad ogni suo information set. La strategia è funzione degli information set perché essi racchiudono tutte le informazioni che un giocatore ha raccolto durante il gioco ed ovviamente non può accadere che la scelta di un'azione si basi su informazioni che un giocatore non possiede.

3.2.1 Le strategie pure

Prendiamo come esempio la figura 3.2. Il giocatore 1 possiede due information set, mentre il giocatore 2 ne possiede uno, $H_1 = \{\{\mathcal{O}\}, \{\delta\}\}$ e $H_2 = \{\{\alpha, \beta\}\}$. Nel caso di strategie pure il giocatore 1 deve specificare due azioni, una per ogni information set, mentre il giocatore 2 ne specifica una soltanto.

Abbiamo, quindi, che una strategia pura per il giocatore i all'interno di un gioco estensivo è una funzione $s_i \colon H_i \to A_i$ dove $A_i \equiv \bigcup_{h \in H_i} A(h)$ ed inoltre $s_i(h) \in A(h)$ per ogni $h \in H_i$. Poiché una strategia pura è un mapping dagli information set del giocatore i alle azioni per lui disponibili, lo spazio di tutte le possibili strategie pure è $S_i \equiv \times_{h \in H_i} A(h)$ cioè l'insieme di tutte le possibili "liste" di azioni da intraprendere ai vari information set.

Un profilo di strategie pure è una n-pla di strategie, una per ogni giocatore. È possibile dimostrare che un profilo di strategie seleziona un solo risultato del gioco che è identificato dall'unico nodo terminale raggiunto a partire dal nodo iniziale, utilizzando le azioni specificate nelle strategie dei giocatori. Lo spazio dei profili di strategie è $S \equiv \times_{i \in N} S_i$. Il payoff che ogni giocatore riceve è pari al valore assegnato dalla funzione $\mu_i(\cdot)$ in corrispondenza del nodo terminale raggiunto. Se indichiamo con la funzione $\hat{z} \colon S \to Z$ la funzione che, dato un profilo di strategie, indica qual è il nodo terminale raggiunto, possiamo affermare che l'utilità del giocatore i per un dato profilo di strategie $s \in S$ è

$$u_i(s) \equiv \mu_i(\hat{z}(s)). \tag{3.1}$$

3.2.2 Le strategie randomizzate

Per i giochi estensivi esistono due tipi di strategie randomizzate: un tipo è quello delle *behavior strategy* mentre l'altro è quello delle *mixed strategy*.

Iniziamo definendo il concetto di behavior strategy. In questo caso, la strategia di ogni giocatore specifica la probabilità con la quale giocherà una particolare azione dell'insieme $A(h)$ se durante il gioco si trovasse effettivamente nell'information set h. Sia $\Delta(A(h))$ l'insieme di tutte le possibili distribuzioni di probabilità sull'insieme $A(h)$. Una behavior strategy per il giocatore i è un elemento b_i dell'insieme $B_i \equiv \times_{h \in H_i} \Delta(A(h))$. La probabilità di giocare l'azione $a \in A(h)$ all'information set h la indichiamo con $b_i(a|h)$. Lo spazio dei profili di behavior strategy lo indichiamo con $B \equiv \times_{i \in N} B_i$.

A differenza del caso delle strategie pure, un profilo di behavior strategy non identifica un unico risultato per il gioco estensivo ma induce una distribuzione di probabilità su tutti i risultati del gioco. Per raggiungere un particolare risultato z tutti i giocatori devono effettuare come scelte le azioni che portano a quel nodo terminale. Quindi la probabilità che venga raggiunto il nodo terminale z dato un particolare profilo di behavior strategy $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ è

$$P(z|b) \equiv \prod_{x \in \hat{X}(z)} b_{\iota(x)}(\hat{a}(x,z)|\hat{h}(x)), \tag{3.2}$$

dove con $\hat{X}(z)$ indichiamo l'insieme di tutti i nodi di decisione che giacciono sul percorso dal nodo iniziale al nodo terminale z, mentre con $\hat{a}(x,z)$ indichiamo l'azione che il giocatore $\iota(x)$ deve scegliere affinché sia possibile arrivare a z.

Tramite questa distribuzione di probabilità sui risultati del gioco abbiamo definito una lotteria su Z e le utilità di von Neumann/Morgenstern di ogni giocatore sono rappresentate dalle funzioni $\mu_i(\cdot)$. In questo caso l'utilità di un profilo di behavior strategy per un giocatore è dato dal valore atteso della lotteria appena definita.

Il concetto di mixed strategy per un gioco estensivo è molto simile a quello di strategia mista per i giochi strategici, vedi sezione 2.2. Infatti una mixed strategy σ_i per il giocatore i è una distribuzione di probabilità sull'insieme delle sue strategie pure: $\sigma_i \in \Sigma_i \equiv \Delta(S_i)$. Anche in questo caso un profilo di strategie miste, il cui spazio è $\Sigma \equiv \times_{i \in N} \Sigma_i$ induce sull'insieme dei risultati del gioco una distribuzione di probabilità che insieme ai valori di payoff $\mu_i(\cdot)$, interpretati come utilità di von Neumann/Morgenstern, danno origine ad una lotteria sui risultati il cui valore atteso viene utilizzato per stabilire la relazione di preferenza dei giocatori sull'insieme dei profili di mixed strategy.

La probabilità con cui viene raggiunto un particolare risultato z del gioco, dato un profilo di mixed strategy σ, è definita nel seguente modo. Sia $\hat{S}_i(z) \subseteq S_i$ il sottoinsieme delle strategie pure del giocatore i che non precludono il raggiungimento del risultato $z \in Z$. Ciò significa che se $s_i \in \hat{S}_i(z)$ allora esiste un profilo di strategie pure degli avversari s_{-i} tale che il profilo (s_i, s_{-i}) raggiunge z, cioè $\hat{z}(s_i, s_{-i}) = z$. Per raggiungere z tutti i giocatori devono scegliere una strategia pura che non precluda il raggiungimento di quel particolare risultato. La probabilità che il giocatore i scelga una strategia pura che non esclude il raggiungimento di z data la sua mixed strategy σ_i è

$$\sum_{s_i \in \hat{S}_i(z)} \sigma_i(s_i), \tag{3.3}$$

da cui possiamo affermare che la probabilità di raggiungere il risultato z dato il profilo di mixed strategy σ dei giocatori è

$$P(z|\sigma) \equiv \prod_{i \in N} \left(\sum_{s_i \in \hat{S}_i(z)} \sigma_i(s_i) \right). \tag{3.4}$$

La differenza che corre fra i due tipi di strategie randomizzate può essere esemplificata in questo modo. Nelle mixed strategy il giocatore all'inizio del gioco estrae, a partire da una distribuzione che lui sceglie, la strategia completa per l'intero gioco. Nelle behavior strategy il giocatore sceglie all'inizio del gioco una strategia che durante il gioco gli indica per ogni suo information set quale distribuzione utilizzare per scegliere un'azione. Nel primo caso abbiamo una randomizzazione iniziale che porta alla determinazione di tutto il piano di gioco, nel secondo caso abbiamo più randomizzazioni una per ogni information set nel quale il giocatore si trova a decidere.

3.3 Equilibri di Nash nei giochi estensivi

Nella precedente sezione abbiamo definito i vari tipi di strategia per un gioco estensivo, abbiamo caratterizzato le eventuali distribuzioni di probabilità sui risultati del gioco e abbiamo definito anche i valori di payoff: possiamo, dunque, definire l'equilibrio di Nash per un gioco estensivo.

Definizione 3.1. *Sia Γ un gioco estensivo, e $i \in N$ i giocatori che vi prendono parte. Un profilo di strategie $s^* \in S$ è un* ***equilibrio di Nash*** *del gioco estensivo Γ se*

$$u_i(s^*) \geq u_i(s'_i, s^*_{-i}), \quad \forall s'_i \in S_i, \forall i \in N. \tag{3.5}$$

dove la funzione di utilità di ogni giocatore è definita in (3.1).

In maniera molto simile si possono definire altre due tipologie di equilibri.

Definizione 3.2. *Sia Γ un gioco estensivo, e $i \in N$ i giocatori che vi prendono parte. Un profilo di behavior strategy $b^* \in B$ è un* ***equilibrio di Nash di behavior strategy*** *del gioco estensivo Γ se*

$$u_i(b^*) \geq u_i(b'_i, b^*_{-i}), \quad \forall b'_i \in B_i, \forall i \in N. \tag{3.6}$$

dove la funzione u_i è una funzione di utilità di von Neumann/Morgenstern e la distribuzione su Z è data da (3.2).

Definizione 3.3. *Sia Γ un gioco estensivo, e $i \in N$ i giocatori che vi prendono parte. Un profilo di mixed strategy $\sigma^* \in \Sigma$ è un* ***equilibrio di Nash di mixed strategy*** *del gioco estensivo Γ se*

$$u_i(\sigma^*) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma^*_{-i}), \quad \forall \sigma'_i \in \Sigma_i, \forall i \in N. \tag{3.7}$$

dove la funzione u_i è una funzione di utilità di von Neumann/Morgenstern e la distribuzione su Z è data da (3.4).

3.3.1 Forma strategica di un gioco estensivo

Sappiamo, dal capitolo 2, che un gioco strategico è composto da un insieme N di giocatori, dallo spazio dei profili di strategie $S \equiv \times_{i \in N} S_i$ e dalle funzioni di utilità $u_i(\cdot)$ che caratterizzano le preferenze dei giocatori sui risultati del gioco.

A partire da un gioco estensivo Γ possiamo definire la sua forma strategica come un gioco strategico G nel quale

- i giocatori di G sono gli stessi del gioco Γ;
- il profilo delle strategie di G è dato dal profilo delle strategie pure del gioco Γ;
- i giocatori di G hanno funzioni di utilità costruite a partire da (3.1).

Una conseguenza di questa corrispondenza uno a uno tra le strategie del gioco in forma estensiva e le strategie del gioco in forma strategica è che gli equilibri di Nash di un gioco in forma estensiva possano essere ricavati dagli equilibri di Nash della sua forma strategica. Ponendo attenzione, possiamo notare che le strategie miste della forma strategica di un gioco estensivo sono proprio le mixed strategy del gioco in forma estensiva.

Quello che ci chiediamo e se esista una relazione fra le mixed strategy e le behavior strategy di un gioco estensivo. Esiste un risultato importante a riguardo.

Teorema 3.4 (di Kuhn). *Nei giochi estensivi a memoria perfetta data una behavior strategy è possibile ricavare una mixed strategy equivalente e viceversa.*

Dimostrazione. La dimostrazione è dovuta a Kuhn [5], ed è presente anche in [8, 2]. □

Due strategie per un giocatore si dicono equivalenti se inducono la stessa distribuzione di probabilità sui risultati del gioco, qualunque sia il profilo di strategie utilizzate dai suoi avversari. Questo fa sì che nei giochi a memoria perfetta sia possibile utilizzare i due concetti in maniera interscambiabile. Una conseguenza di questo teorema è che si possono individuare gli equilibri di Nash di un gioco estensivo a memoria perfetta in qualsiasi forma che risulti più conveniente, estensiva o strategica.

Supponiamo, ad esempio, di analizzare il profilo di mixed strategy σ^* e sia il caso che σ_i^* non sia una best response alle strategie σ_{-i}^*, ciò significa che esiste una strategia σ_i' che, tramite $(\sigma_i', \sigma_{-i}^*)$, genera una lotteria migliore per il giocatore i, cioè genera una distribuzione migliore sui risultati del gioco. Se consideriamo un profilo di behavior strategy b^* tale che, per tutti i giocatori $i \in N$, σ_i^* è equivalente a b_i^* allora deve esistere una behavior strategy b_i' equivalente a σ_i'. Per tale ragione il profilo di strategie (b_i', b_{-i}^*) porta un valore atteso per il giocatore i più alto di quanto non faccia b^*. Perciò, in un gioco estensivo a memoria perfetta, un profilo di mixed strategy è un equilibrio di Nash di mixed strategy se e solo se è un equilibrio di Nash di behavior strategy il profilo di behavior strategy equivalenti.

3.3.2 Esempio di equilibrio di Nash in un gioco estensivo

Consideriamo l'esempio di figura 3.3. Questo gioco estensivo possiede due equi-

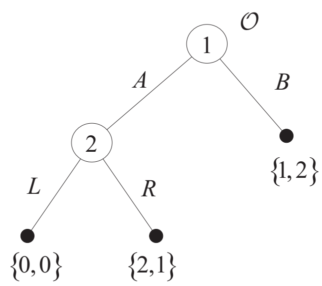

Figura 3.3: Un gioco estensivo ad informazione perfetta.

libri di Nash di strategie pure: (A, R) e (B, L). Il profilo di strategie (B, L) è un equilibrio di Nash perché, posto che il giocatore 1 giocherà B, allora per il giocatore 2 risulta indifferente giocare L o R, mentre dato che il giocatore 2 giocherà L allora al giocatore 1 conviene strettamente giocare B. Che questi due profili di strategie siano degli equilibri di Nash si può vedere anche dalla forma strategica del gioco, mostrata in figura 3.4. Se interpretiamo un nodo

	L	R
A	0,0	**2**,**1**
B	**1**,**2**	1,**2**

Figura 3.4: La forma strategica del gioco estensivo di figura 3.3. Sulle righe gioca il giocatore 1, mentre sulle colonne gioca il giocatore 2. In grassetto sono evidenziate le best response dei giocatori.

di decisione come un punto nel quale un giocatore può effettuare una scelta, l'equilibrio (B, L) non risulta essere plausibile. (B, L) è un equilibrio di Nash perché il giocatore 2 "minaccia" il giocatore 1 di scegliere L nel momento in cui gli venga data questa possibilità: di conseguenza il giocatore 1 preferisce giocare B. Ma questa minaccia non è credibile in quanto se effettivamente il gioco arrivasse al punto in cui il giocatore 2 deve scegliere, per lui sarebbe conveniente R e non L: questo il giocatore 1 lo sa e quindi giocherà A. Perciò è impossibile osservare in una situazione reale, modellata dal gioco di figura 3.3, l'equilibrio (B, L). Ciò vuol dire che il concetto di equilibrio di Nash in questo caso è troppo debole per escludere il profilo di strategie (B, L).

3.4 Sottogiochi

Definiamo adesso un concetto importante che verrà utilizzato nella sezione 3.5 Un "sottogioco" (*subgame* in inglese) è essenzialmente una parte di un gioco estensivo più ampio, e viene definito proprio come sottoinsieme del gioco originale. Sul subgame vengono imposte due condizioni: la prima impone che il sottoinsieme costituisca effettivamente un gioco mentre la seconda impone che il subgame venga giocato nelle stesse condizioni di informazione che si avrebbero incontrando il subgame nel gioco originale.

Consideriamo un gioco estensivo Γ. Per riuscire a definire un subgame dobbiamo dire come si possa decomporre il gioco originale al nodo v^* per ottenere l'*oggetto* Γ^* (ancora non sappiamo se è un gioco...). Se il nodo v^* è il nodo iniziale di Γ allora Γ^* equivale a Γ, ed è effettivamente un gioco. Altrimenti si prende il ramo entrante del nodo v^* e lo si taglia: vengono in questo modo generati due alberi uno dei quali contiene v^*. Supponiamo che l'albero che contiene v^* sia il grafo di vertici ed archi $(\widetilde{V}, \widetilde{E})$, dove $\widetilde{V} \subset V$ e $\widetilde{E} \subset E$ con (V, E) il grafo dell'albero originale. Assegnamo a v^* il ruolo di nodo iniziale di Γ^*. Possiamo notare come l'insieme di nodi $\widetilde{V}$ consiste del nodo v^* e dei suoi successori nel gioco originale, ciò implica che Γ^* è chiuso rispetto alla relazione di successione: cioè se $v \in \Gamma^*$ e $v \prec v'$ allora $v' \in \Gamma^*$.

Per completare la specificazione di Γ^* diciamo che questo eredita gran parte della struttura del gioco Γ tramite l'operazione di *restrizione*. I nodi di decisione per Γ^* sono $\widetilde{X} \equiv X \cap \widetilde{V}$, i nodi terminali di Γ^* sono $\widetilde{Z} \equiv Z \cap \widetilde{V}$. La funzione $\widetilde{f} \colon \widetilde{E} \to A$, che assegna ad ogni ramo un'azione, può essere definita in maniera semplice come la restrizione della funzione f di Γ sull'insieme $\widetilde{E}$.[2] Lo stesso vale per la funzione $\tilde{\iota}(\cdot)$, che assegna i giocatori ai nodi decisionali, definita coma la restrizione di $\iota(\cdot)$ su $\widetilde{X}$, e per la funzione $\tilde{\mu}_i(\cdot)$, che è la funzione di payoff dei giocatori, definita come la restrizione di $\mu_i(\cdot)$ su $\widetilde{Z}$. Le relazione di precedenza fra i nodi di Γ^* può essere ricavata a partire da quella di Γ restringendo il campo all'insieme $\widetilde{V} \times \widetilde{V}$, e lo stesso si fa per la funzione $\widetilde{A}\colon \widetilde{X} \to A$ che assegna le azioni disponibili ad un nodo decisionale. La nuova partizione $\widetilde{H}$ degli information set è composta dagli information set $\tilde{h} \equiv h \cap \widetilde{V}$ tali che $h \in H$.

Per come è stato definito, l'oggetto Γ^* è effettivamente un gioco, ma questo non basta. Ci dobbiamo assicurare che nel momento in cui il subgame viene raggiunto all'interno del gioco originale, sia conoscenza comune di tutti i giocatori che la parte rimanente del gioco è proprio quel subgame. Si vuole, perciò, che il subgame rispetti gli information set: se h è un information set del gioco originale vogliamo che appaia per intero nel subgame o non compaia per nulla, cioè $h \in H \Rightarrow (h \in \widetilde{H} \vee h \cap \widetilde{X} = \varnothing)$. Per la condizione appena imposta il nodo v^* deve essere in un information set singoletto altrimenti non si potrebbe costruire un subgame.

Spesso l'oggetto Γ^* derivato dalla decomposizione di Γ viene chiamato *subgame*, mentre dopo che viene imposto il vincolo appena descritto sugli information set viene chiamato *proper subgame*. Poiché la maggior parte delle volte si è interessati ai proper subgame si parla solamente di subgame. Riproponiamo in figura 3.5 il gioco estensivo di figura 3.2 nel quale vengono evidenziati due subgame. Il subgame che inizia nel nodo δ è un proper subgame, mentre quello

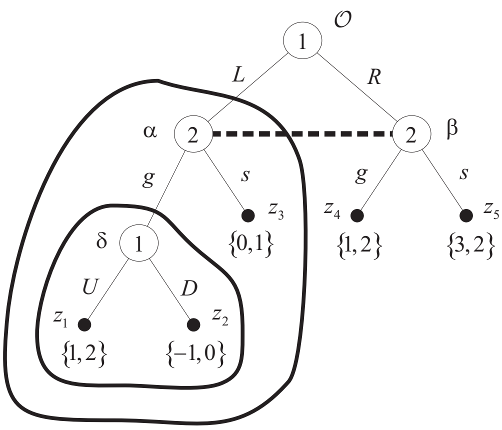

Figura 3.5: Un esempio di suddivisione in subgame.

che inizia nel nodo α non lo è perché taglia l'information set $\{\alpha, \beta\}$.

3.5 Subgame Perfect Equilibrium

Come abbiamo visto nell'esempio di figura 3.3 della sezione 3.3.2, il concetto di equilibrio Nash non è abbastanza forte da escludere situazioni non plausibili.

[2] Sia $f\colon X \to Z$ una funzione e sia Y un insieme tale che $X \cap Y \neq \varnothing$. Definiamo la *restrizione* $\tilde{f}$ della funzione f su Y come la funzione $\tilde{f}\colon (X \cap Y) \to Z$ tale che $\tilde{f}(x) \equiv f(x), \forall x \in (X \cap Y)$.

Selten in [16, 17] propone un concetto più stringente di equilibrio, che serve proprio ad escludere le situazioni mostrate in figura 3.3. Quello che caratterizza l'equilibrio non plausibile è che una volta che tocca al giocatore 2 egli non effettua una scelta ottimale per la parte rimanente del gioco. Per questa ragione risulta importante il concetto di "sottogioco" introdotto nella sezione 3.4. L'equilibrio (B, L) del gioco di figura 3.3 poggia sulla scelta di un'azione non ottimale ad un information set che non verrebbe raggiunto se i giocatori si attenessero alle loro strategie.

Per illustrare questo nuovo concetto di equilibrio è necessario specificare cosa sia la restrizione di una strategia su un subgame. Poiché un profilo di strategie indica quali scelte effettua un giocatore in corrispondenza dei propri information set, intuitivamente la restrizione di una strategia deve avvenire proprio sugli information set. Siano Γ^* il subgame d'interesse, $\widetilde{H}$ la partizione in information set dei nodi $\widetilde{V}$ di Γ^* e $\widetilde{H}_i$ gli information set di Γ^* che appartengono al giocatore $i \in N$.

Data una strategia pura s_i per il giocatore i nel gioco originale Γ si costruisce la strategia $\tilde{s}_i$ come la restrizione di s_i per il subgame Γ^* attraverso il restringimento del dominio di s_i al nuovo insieme di information set del giocatore i in Γ^*. Cioè $\tilde{s}_i \colon \widetilde{H}_i \to A_i$ e $\tilde{s}_i(h) \equiv s_i(h), \forall h \in \widetilde{H}_i$. Lo spazio delle strategie del giocatore i all'interno del subgame è

$$\widetilde{S}_i \equiv \times_{h \in \widetilde{H}_i} \widetilde{A}(h). \tag{3.8}$$

Data una behavior strategy b_i per il giocatore i nel gioco originale Γ si definisce la behavior strategy $\tilde{b}_i$ come la restrizione di b_i per il subgame Γ^* attraverso il restringimento del dominio di b_i al nuovo insieme di information set del giocatore i in Γ^*. Abbiamo quindi che $\tilde{b}_i(\cdot|h) \equiv b_i(\cdot|h), \forall h \in \widetilde{H}_i$. Da ciò lo spazio delle behavior strategy del giocatore i all'interno del subgame è

$$\widetilde{B}_i \equiv \times_{h \in \widetilde{H}_i} \Delta(\widetilde{A}(h)). \tag{3.9}$$

Per le mixed strategy non c'è una definizione della restrizione perché è difficile darne un senso. Questa è la ragione primaria per cui vengono utilizzate le behavior strategy e quindi ritorna utilissimo il teorema 3.4.

Il nuovo concetto di equilibrio che introduciamo impone che ogni giocatore effettui una scelta ottimale in qualunque parte del gioco si trovi.

Definizione 3.5. *Un profilo di behavior strategy b per un gioco estensivo Γ si dice essere un* ***Subgame Perfect Equilibrium*** *se la restrizione di b in qualunque proper subgame Γ^* risulta essere un equilibrio di Nash per Γ^*.*

Da questa definizione possiamo ricavare in maniera semplice il criterio di Subgame Perfect Equilibrium per un profilo di strategie pure, in quanto una strategia pura può essere vista come una behavior strategy nella quale ad ogni information set il giocatore utilizza una distribuzione degenere di gioco che assegna probabilità uno ad una sola azione.

Ritornando all'esempio di figura 3.3 il profilo di strategie (B, L) non è un subgame perfect equilibrium perché la sua restrizione, sul subgame che comincia con la mossa del giocatore 2, (L), non è un equilibrio di Nash di quel subgame.

Esiste un risultato importante riguardo ai subgame perfect equilibrium.

Teorema 3.6. *Ogni gioco estensivo finito ad informazione perfetta ammette un subgame perfect equilibrium di strategie pure.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema è dovuta a Kuhn [5] ed è datata 1953. Questa dimostrazione, però, non fa che ricalcare un algoritmo proposto da Zermelo [19] nel 1913. □

L'algoritmo proposto da Zermelo permette di calcolare un profilo di strategie pure, per un gioco estensivo finito ad informazione perfetta, che risulta essere un subgame perfect equilibrium. Questo algoritmo è noto come algoritmo di *backward induction* perché essenzialmente costruisce le strategie ottimali partendo dal fondo dell'albero di gioco. Partendo dai nodi di decisione immediatamente precedenti ai nodi terminali si dice: "Supponiamo che il gioco sia arrivato fino a questo punto, qual è la migliore azione che può scegliere il giocatore di turno?". Scelta questa azione i payoff vengono "trasportati" verso i livelli superiori e si continua a selezionare le azioni migliori fino ad arrivare al nodo iniziale del gioco. Questo teorema/algoritmo è quello su cui si basa la correttezza dell'algoritmo *minimax* utilizzato in intelligenza artificiale per la risoluzione dei giochi [15].

3.6 Interpretazione delle strategie nei giochi estensivi

Come abbiamo visto, in un gioco estensivo la specificazione di una strategia comporta, per ogni giocatore, la definizione di una scelta per ogni information set. Un giocatore, quindi, deve specificare un'azione per ogni sequenza di eventi che sia consistente con la struttura del game tree e perciò consistente con le *regole del gioco*. Sottolineiamo il fatto che un giocatore specifica azioni per le sequenze di eventi consistenti con la *struttura del gioco* e non consistenti con le *strategie* scelte dagli avversari e la sua stessa strategia.

Nei giochi in cui è richiesto ad almeno un giocatore di effettuare più di una mossa, potrebbe accadere che la strategia di un giocatore debba specificare azioni ad information set che la strategia stessa preclude per scelte effettuate ad information set precedenti. Consideriamo l'esempio di figura 3.6 preso da [8]. Il

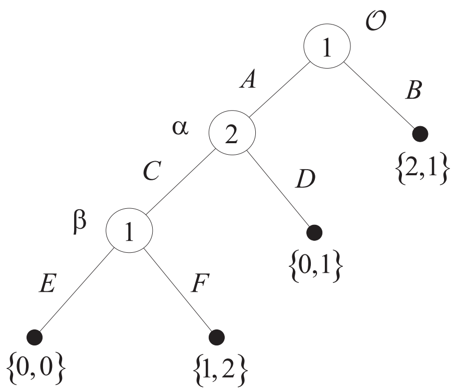

Figura 3.6: Un esempio di gioco estensivo in cui il giocatore 1 muove prima e dopo il giocatore 2.

giocatore 1 in questo gioco deve specificare nella sua strategia sia l'azione che intende effettuare al nodo $\mathcal{O}$, sia quella che intende scegliere al nodo β, anche se la sua scelta al nodo $\mathcal{O}$ fosse B! Per questa ragione la nozione di strategia all'interno di un gioco estensivo è differente da quella di *piano d'azione*, in quanto un giocatore deve specificare la scelta delle sue azioni anche in circostanze che sono impossibili da raggiungere seguendo le sue stesse scelte precedenti. Le strategie potrebbero essere ridotte alla specifica delle azioni nei soli infermation set consistenti con le strategie stesse solo nel momento in cui fossimo interessati ai semplici equilibri di Nash nei giochi estensivi (vedi sezione 3.3). Poiché, invece, sono state definite delle nozioni più stringenti di equilibrio, quale il subgame perfect equilibrium (vedi sezione 3.5) , che utilizzano la nozione di *sequential rationality*, cioè che i giocatori si comportano in maniera ottimale in ogni sottoparte del gioco, è necessario specificare quali azioni i giocatori sceglierebbero in qualsiasi loro information set.

Ritornando all'esempio di figura 3.6, il giocatore 2 per effettuare una scelta al nodo α che faccia parte di un subgame perfect equilibrium ha necessità di sapere come si comporterebbe il giocatore 1 al nodo β, anche se la strategia di questo specificasse B come azione al nodo $\mathcal{O}$. In più, lo stesso giocatore 1 per effettuare al nodo $\mathcal{O}$ una scelta che faccia parte di un subgame perfect equilibrium necessita sapere come si comporterà il giocatore 2 al nodo α e quindi indirettamente deve sapere cosa farebbe egli stesso al nodo β: quindi per decidere di scegliere B al nodo $\mathcal{O}$, il giocatore 1 deve specificare cosa giocherebbe al nodo β il quale, in realtà, viene effettivamente precluso dalla scelta ottimale B al nodo iniziale.

L'interpretazione, quindi, che viene data alle strategie nei giochi estensivi è quella di *belief* (*convinzioni*) [13, 8]. In questo contesto, le azioni della strategia di un giocatore i agli information set che non verrebbero raggiunti se si seguisse la strategia, vengono interpretate come i belief degli avversari di i circa le azioni che il giocatore i sceglierebbe se non seguisse la sua stessa strategia.

Questa interpretazione ha delle implicazioni. Primo, risulta problematico parlare della "scelta di una strategia". Questo perché un giocatore sceglie le azioni che lui intende svolgere nei vari punti del gioco, ma non può scegliere i belief degli altri giocatori. Secondo, nei giochi a cui prendono parte più di due giocatori l'interpretazione delle strategie come belief implica che tutti gli avversari del giocatore i condividano le *stesse* convinzioni sulle scelte di i, non solo quando questo segue il suo piano d'azione ma anche quando il giocatore i devia dal comportamento prescritto dalla sua strategia. Terzo, quando si impongono dei vincoli sulle strategie dei giocatori non solo si specificano delle assunzioni sul comportamento dei giocatori ma anche sui belief che questi hanno nei confronti dei loro avversari.

Bibliografia

[1] Aumann, R. J. Acceptable points in general cooperative n-person games. In *Contributions to the Theory of Games, Volume IV*, A. W. Tucker and R. D. Luce, Eds., vol. 40 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, March 1959, pp. 287–324. http://www.ma.huji.ac.il/~raumann/. 12

[2] Fudenberg, D., and Tirole, J. *Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, MA, August 1991. 9, 23

[3] Gardner, R. *Games for Business and Economics*, 1st ed. John Wiley & Sons, New York, NY, October 1994. 13

[4] Kreps, D. M., and Wilson, R. Sequential equilibria. *Econometrica 50*, 4 (July 1982), 863–894. http://www.jstor.org. 6, 19

[5] Kuhn, H. W. Extensive games and the problem of information. In *Contributions to the Theory of Games, Volume II*, H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Eds., vol. 28 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, March 1953, pp. 193–216. 19, 23, 27

[6] Nash, J. F. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36*, 1 (January 1950), 48–49. http://www.pnas.org/cgi/reprint/36/1/48. 4, 9

[7] Osborne, M. J. *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press, New York, NY, August 2003. 6

[8] Osborne, M. J., and Rubinstein, A. *A Course in Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, MA, July 1994. 2, 3, 5, 8, 9, 12, 23, 27, 28

[9] Radner, R., and Rosenthal, R. Private information and pure-strategy equilibria. *Mathematics of Operations Research 7*, 3 (August 1982), 401–409. http://www.informs.org/Pubs/Math. 12

[10] Ratliff, J. Arborescences and game trees. University of California Berkeley, 1991. mimeo. 20

[11] Ratliff, J. Extensive-form games: Introduction. http://virtualperfection.com/gametheory, 1997. 17, 19, 20

[12] Ross, D. Game theory. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, Ed. Spring 2006. http://plato.stanford.edu/archives/spr2006/entries/game-theory/. 1

[13] Rubinstein, A. Comments on the interpretation of game theory. *Econometrica 59*, 4 (July 1991), 909–924. http://arielrubinstein.tau.ac.il. 2, 5, 12, 28

[14] Rubinstein, A. *Lecture Notes in Microeconomic Theory: The Economic Agent*. Princeton University Press, Princeton, NJ, February 2006. http://arielrubinstein.tau.ac.il. 7

[15] Russel, S., and Norvig, P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 2nd ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, February 2003. 27

[16] Selten, R. Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfragetragheit. *Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft 121*, 2, and 4 (1965), 301–324, and 667–689. 26

[17] Selten, R. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory 4*, 1 (March 1975), 25–55. http://www.springerlink.com. 26

[18] von Neumann, J., and Morgenstern, O. *The Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd ed. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1947. 1, 7

[19] Zermelo, E. Über eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachpiels. In *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians* (Cambridge, UK, 1913), E. W. Hobson and A. E. H. Love, Eds., vol. 2, Cambridge University Press, pp. 501–504. 27